8. Aplicaciones proyectivas. Sistemas de referencia

Aplicaciones proyectivas.

Al igual que hemos hecho en otros casos (espacios afines, espacios afines euclídeos), queremos estudiar ahora las aplicaciones que respeten la estructura que estamos estudiando en este momento, los espacios proyectivos. Como dos espacios proyectivos $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ se construyen a partir de espacios vectoriales V y V' mediante la relación de equivalencia $\sim$ dada en la definición 7.5, podríamos construir las aplicaciones de $\mathbf{P}(V)$ a $\mathbf{P}(V')$ partiendo de aplicaciones adecuadas de V a V'. Necesitaríamos por una parte que estas aplicaciones dieran lugar a aplicaciones *bien definidas* en $\mathbf{P}(V)$. En segundo lugar querríamos que nuestras aplicaciones de $\mathbf{P}(V)$ a $\mathbf{P}(V')$ conservaran "propiedades proyectivas", por ejemplo, que convirtieran subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(V)$ en subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(V')$ o que transformaran puntos alineados de $\mathbf{P}(V)$ en puntos alineados en $\mathbf{P}(V')$. Lo más natural es mirar a las aplicaciones lineales de V a V', que parece que nos permiten dar aplicaciones bien definidas entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$:

Observación 8.1. Sea $\phi : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y V'. Dado $p \in \mathbf{P}(V)$, sean v_1, v_2 vectores no nulos de V tales que $p = [v_1] = [v_2]$. Si $\phi(v_1) \neq \vec{0}_V$ (o lo que es lo mismo, si $\phi(v_2) \neq \vec{0}_V$ (¿por qué?)), $[\phi(v_1)] = [\phi(v_2)] \in \mathbf{P}(V')$.

Demostración. Sabemos que $[v_1] = [v_2]$ equivale a que $v_1 \sim v_2$, y esto quiere decir que existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $v_2 = \lambda v_1$. Como $\phi(v_1)$ y $\phi(v_2)$ son distintos de $\vec{0}_V$, tiene sentido hablar tanto de $[\phi(v_1)]$ como de $[\phi(v_2)]$, que son puntos de $\mathbf{P}(V')$. Como ϕ es una aplicación lineal $\phi(v_2) = \lambda\phi(v_1)$, por lo que $\phi(v_1) \sim \phi(v_2)$, es decir, $[\phi(v_1)] = [\phi(v_2)] \in \mathbf{P}(V')$. $\square$

La observación 8.1 sugiere definir, a partir de una aplicación lineal $\phi : V \longrightarrow V'$, una aplicación entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(V) & \longrightarrow & \mathbf{P}(V') \\ {[v]} & \mapsto & [\phi(v)] \end{array} .$$

Implícito en la observación 8.1 está que *no* podemos esperar que ϕ induzca una aplicación entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$, *bien definida en todos los puntos de* $\mathbf{P}(V)$, puesto que bien pueden existir vectores no nulos $v \in V$, que dan por tanto lugar a puntos $[v]$ de $\mathbf{P}(V)$, tales que $\phi(v) = 0$ (esto pasa si kerϕ, es decir, si ϕ no es inyectiva), con lo cual $[\phi(v)]$ no tendría sentido. Podríamos entonces elegir estudiar solo aquellas aplicaciones entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ inducidas por aplicaciones lineales inyectivas. Sin embargo, no será esto lo que hagamos, ya que en ese caso dejaríamos de estudiar aplicaciones, que aunque no estén definidas en todo $\mathbf{P}(V)$, son interesantes desde un punto de vista geométrico. Lo que haremos será aceptar que ϕ no induce en general una aplicación bien definida en todo $\mathbf{P}(V)$ pero sí en $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{P}(\ker\phi)$:

Definición 8.2. *(aplicación proyectiva)* Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre $\mathbf{k}$, sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ sus proyectivizados, sea ϕ una aplicación lineal no nula de V a V' y sea

Observación 8.3. En la definición anterior, como ϕ no es nula, el centro de una aplicación proyectiva es un subespacio proyectivo *propio* de $\mathbf{P}(V)$.

Tal como queríamos, una aplicación proyectiva transforma subespacios proyectivos en subespacios proyectivos y puntos alineados en puntos alineados:

Proposición 8.4. *Sean V y V' dos espacios vectoriales, sea ϕ una aplicación lineal no nula entre V y V' y sea f la aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ inducida por ϕ.*

(1) *La imagen de f es $\mathbf{P}(\mathrm{im}\phi)$, que es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V')$.*
(2) *Si W es un subespacio vectorial de V, $f(\mathbf{P}(W)) = \mathbf{P}(\phi(W))$.*
(3) *La aplicación f transforma puntos alineados no contenidos en el centro de f en puntos alineados.*
(4) *La imagen inversa de un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V')$ por f es $\Lambda \setminus \mathbf{P}(\ker\phi)$, donde $\Lambda = \mathbf{P}(\phi^{-1}W')$, que es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)$ (que contiene al centro de f, $\mathbf{P}(\ker\phi)$).*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 8.5. *Sean $\mathbf{P}(V)$, $\mathbf{P}(V')$ y $\mathbf{P}(V'')$ tres espacios proyectivos, sea f una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ y sea g una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V')$ y $\mathbf{P}(V'')$ tal que la imagen de f no está contenida en el centro de g, que llamaremos Λ'. Asimismo, llamaremos Λ al centro de f. Entonces $g \circ f$ es una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V'')$ y su centro es $f^{-1}(\Lambda') \cup \Lambda$. Además, si f viene inducida por una aplicación lineal $\phi : V \longrightarrow V'$ y g viene inducida por una aplicación lineal $\psi : V' \longrightarrow V''$, $g \circ f$ viene inducida por $\psi \circ \phi$.*

Demostración. Ejercicio. □

Corolario 8.6. *Sea f una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ de centro Λ, y sea $L = \mathbf{P}(W)$ un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)$ no contenido en Λ. La restricción de f a L*

$$f|_L : L \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$$

es una aplicación proyectiva de centro $\Lambda \cap L$.

Demostración. La inclusión

$$i : L \longrightarrow \mathbf{P}(V)$$

es una aplicación proyectiva inducida por la inclusión de W en V. La restricción $f|_L$ es igual a la composición $f \circ i$. Como la imagen de i es L y L no está contenido en Λ, el resultado se sigue de la proposición 8.5. Observa además que si f está inducida por una aplicación lineal ϕ, $f|_L$ está inducida por $\phi|_W$. □

Demostración. Si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $\phi_1 = \lambda\phi_2$ es claro que ϕ_1 y ϕ_2 inducen la misma aplicación proyectiva. En efecto, $\ker\phi_1 = \ker\phi_2$, por lo que las aplicaciones proyectivas inducidas por ϕ_1 y ϕ_2 tendrían el mismo centro $\Lambda = \mathbf{P}(\ker\phi_1) = \mathbf{P}(\ker\phi_2)$. Por otra parte, dado $[v] \in \mathbf{P}(V) \smallsetminus \Lambda$, $[\phi_2(v)] = [\lambda\phi_1(v)] = [\phi_1(v)]$.

Supongamos ahora que ϕ_1 y ϕ_2 inducen la misma aplicación proyectiva f. Entonces el conjunto donde está definida f es por una parte $\mathbf{P}(V) \smallsetminus \mathbf{P}(\ker\phi_1)$ y por otra parte $\mathbf{P}(V) \smallsetminus \mathbf{P}(\ker\phi_2)$, por lo que $\mathbf{P}(\ker\phi_1) = \mathbf{P}(\ker\phi_2)$ y $\ker\phi_1 = \ker\phi_2$. Consideramos una base $\{v_1, \ldots, v_l\}$ de $\ker\phi_1 = \ker\phi_2$ que completamos hasta una base $\{v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots v_n\}$ de V. Tenemos entonces que $\phi_2(v_1) = \vec{0}_{V'} = \phi_1(v_1), \ldots, \phi_2(v_l) = \vec{0}_{V'} = \phi_1(v_l)$ y, como para todo $i = l+1, \ldots, n$ se tiene $[\phi_1(v_i)] = [\phi_2(v_i)]$, existen $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{k}^*$ tales que $\phi_2(v_{l+1}) = \lambda_{l+1}\phi_1(v_{l+1}), \ldots, \phi_2(v_n) = \lambda_n\phi_1(v_n)$. Sea ahora $w = v_{l+1} + \cdots + v_n$. Como $[\phi_1(w)] = [\phi_2(w)]$, existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $\phi_2(w) = \lambda\phi_1(w)$, por lo que

$$\lambda\phi_1(v_{l+1}) + \cdots + \lambda\phi_1(v_n) = \lambda\phi_1(v_{l+1} + \cdots + v_n) =$$
$$\lambda\phi_1(w) = \phi_2(w) = \phi_2(v_{l+1} + \cdots + v_n) = \lambda_{l+1}\phi_1(v_{l+1}) + \cdots + \lambda_n\phi_1(v_n).$$

Como $v_{l+1}, \ldots, v_n$ son los vectores que hemos añadido a la base del núcleo de ϕ_1 para obtener una base de V, $\phi_1(v_{l+1}), \ldots, \phi_1(v_n)$ son vectores linealmente independientes de V' y se tiene que $\lambda = \lambda_i$ para todo $i = l+1, \ldots, n$. Sea ahora v un vector cualquiera de V. En ese caso existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{k}$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, por lo que

$$\phi_2(v) = \alpha_1\phi_2(v_1) + \cdots + \alpha_l\phi_2(v_l) + \alpha_{l+1}\phi_2(v_{l+1}) + \cdots + \alpha_n\phi_2(v_n) = \alpha_{l+1}\lambda\phi_1(v_{l+1}) + \cdots$$
$$+\alpha_n\lambda\phi_1(v_n) = \lambda(\alpha_1\phi_1(v_1) + \cdots + \alpha_l\phi_1(v_l) + \alpha_{l+1}\phi_1(v_{l+1}) + \cdots + \alpha_n\phi_1(v_n)) = \lambda\phi_1(v),$$

es decir, $\phi_2 = \lambda\phi_1$. □

Si recuerdas la estructura de $\mathbf{k}$–espacio vectorial del conjunto de aplicaciones lineales $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, V')$ entre V y V', puedes reinterpretar la proposición 8.7 de forma más conceptual:

Corolario 8.8. *El conjunto de aplicaciones proyectivas de* $\mathbf{P}(V)$ *a* $\mathbf{P}(V')$ *tiene estructura de espacio proyectivo, ya que se le puede identificar con* $\mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, V'))$*.*

Acabamos esta subsección dando un ejemplo muy importante de aplicaciones proyectivas, las *proyecciones.* Estas aplicaciones justificarían por sí solas nuestra decisión de estudiar aplicaciones proyectivas a las que hemos permitido no estar definidas en todo el espacio proyectivo.

Definición 8.9. *(proyección).* Sean $L_1 = \mathbf{P}(W_1)$ y $L_2 = \mathbf{P}(W_2)$ dos subespacios proyectivos no vacíos de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ sobre $\mathbf{k}$ con las siguientes propiedades:

(1) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$
(2) $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim\mathbf{P}(V) - 1$.

(2) Sean L_1 y L_2 subespacios proyectivos que cumplen (1) y (2) de la definición 8.9 y sea $p \in \mathbf{P}(V) \smallsetminus L_1$. Demuestra que la intersección $< L_1, p > \cap L_2$ es no vacía y que consiste en un solo punto p' (indicación: usa la fórmula de Grassmann proyectiva). Demuestra que $\pi(p) = p'$.

Observación 8.11. La definición 8.9 de π es muy algebraica. El ejercicio 8.10, (2) nos da una definición mucho más geométrica de π.

Ejemplo 8.12. En $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ consideramos $L_1 = \{(0:0:0:1)\}$ y L_2 el plano proyectivo de ecuación implícita $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$. La proyección π desde L_1 (o, simplemente, desde el punto $(0:0:0:1)$) sobre L_2 es la aplicación proyectiva

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} & \dashrightarrow & \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} \\ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \mapsto & (x_0 : x_1 : x_2 : -x_0 - x_1 - x_2) \end{array}.$$

Proyectividades.

Las aplicaciones proyectivas definidas en todo el espacio proyectivo, es decir, las que tienen centro vacío, vienen con una propiedad añadida:

Proposición 8.13. *Sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$ una aplicación proyectiva. Entonces f está definida en todo $\mathbf{P}(V)$ (es decir, tiene centro vacío) si y solo si f es inyectiva.*

Demostración. Sea ϕ una aplicación lineal no nula de V en V' y sea f la aplicación proyectiva inducida por ϕ. Entonces f tiene centro vacío si y solo si $\ker\phi = 0$ y esto es equivalente a que ϕ sea inyectiva.

Veamos ahora que f es inyectiva si y solo si ϕ es inyectiva. Sean $[v_1]$ y $[v_2]$ dos puntos de $\mathbf{P}(V)$. Entonces $f([v_1]) = f([v_2])$ si y solo si $[\phi(v_1)] = [\phi(v_2)]$, es decir, si y solo si $\phi(v_2) = \lambda\phi(v_1)$ para algún $\lambda \in \mathbf{k}^*$, o lo que es lo mismo, si y solo si $\phi(v_2) = \phi(\lambda v_1)$. Por tanto, si ϕ es inyectiva, $v_2 = \lambda v_1$, con lo que $[v_1] = [v_2]$ y f es inyectiva.

Supongamos ahora que ϕ no es inyectiva. Sea w un vector no nulo del núcleo de ϕ, sea v_1 un vector de $V \smallsetminus \ker\phi$ (tal vector v existe porque ϕ no es nula) y sea $v_2 = v_1 + w$. Entonces $[v_1] \neq [v_2]$ pues en caso contrario existiría $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $v_1 + w = \lambda v_1$ o, lo que es lo mismo $w = (\lambda - 1)v_1$, pero como v_1 no está en el núcleo de ϕ y w sí, $\lambda = 1$. En ese caso $v_1 + w = v_1$ por lo que $w = 0$, contradiciendo nuestra elección de w. Por otra parte, como $\phi(w) = 0$, $f([v_1]) = [\phi(v_1)] = [\phi(v_2)] = f([v_2])$, por lo que f no es inyectiva. $\square$

Ya hemos visto que una aplicación proyectiva es inyectiva si y solo si está definida en todo el espacio de partida. Si además de ser inyectiva es biyectiva, diremos que tal aplicación proyectiva es una *proyectividad* o una *homografía*. Las siguientes dos proposiciones caracterizan a las proyectividades entre las aplicaciones proyectivas y nos dicen que sus inversas también son proyectividades. Dejamos las demostraciones como ejercicio.

Proposición 8.14. *Sea $\phi : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales y sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$ la aplicación proyectiva inducida por ϕ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

Definición 8.16. Decimos que dos espacios proyectivos son *isomorfos* si existe una proyectividad entre ellos.

Observación 8.17. Es claro (se deduce del resultado análogo para espacios vectoriales y de la proposición 8.14) que dos espacios proyectivos son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión.

Vemos a continuación algunos ejemplos de de proyectividades:

Ejemplo 8.18. La aplicación proyectiva

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} & \dashrightarrow & \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} \\ & (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \mapsto & (x_0 + x_1 + x_3 : x_1 - x_3 : x_0 + x_2 : x_0 + x_1) \end{array}$$

es una proyectividad. Para verlo, basta tomar una aplicación lineal ϕ de $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^4$ tal que f sea la aplicación proyectiva inducida por ϕ, por ejemplo,

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ & (x_0, x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_0 + x_1 + x_3, x_1 - x_3, x_0 + x_2, x_0 + x_1), \end{array}$$

y comprobar que ϕ es un isomorfimo.

Ejemplo 8.19. En un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ consideramos un punto p y dos hiperplanos proyectivos H_1 y H_2 que no contienen a p. Sea π la proyección desde p sobre H_2. Entonces la restricción de π a H_1

$$\pi|_{H_1} : H_1 \longrightarrow H_2$$

es una proyectividad entre H_1 y H_2. En efecto, el corolario 8.6 implica que $\pi|_{H_1}$ es una aplicación proyectiva que tiene centro vacío, ya que $p \notin H_1$. Entonces la proposición 8.14 (c) implica que $\pi|_{H_1}$ es una proyectividad.

Puntos fijos de una aplicación proyectiva.

Investigamos ahora los puntos fijos de una aplicación proyectiva de un espacio proyectivo en sí mismo. Es claro que las proyecciones tienen puntos fijos (los puntos del subespacio proyectivo sobre el que se proyecta). En general, dada una aplicación proyectiva f, inducida por una aplicación lineal asociada ϕ, de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ en sí mismo, ¿cómo encontramos sus puntos fijos? Ingenuamente pensaríamos que $[v]$ es un punto fijo de f si y solo si v es un vector fijo de ϕ. Sin embargo, como un punto $[v]$ de $\mathbf{P}(V)$ no está representado por un único vector no nulo $v \in V$ sino que cualquier vector no nulo v' múltiplo de v cumple $[v'] = [v]$, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 8.20. *Sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V)$ una aplicación proyectiva inducida por una aplicación lineal $\phi : V \longrightarrow V$.*

(1) *Un punto $[v]$ de $\mathbf{P}(V)$ es un punto fijo de f si y solo si v es un vector propio de ϕ de valor propio no nulo.*
(2) *Un punto $[v]$ de $\mathbf{P}(V)$ pertenece al centro de f si y solo si v es un vector propio de ϕ de valor propio 0.*

Ejemplo 8.21. Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ y sean λ y λ' dos escalares distintos no nulos de $\mathbf{k}$. Sean ϕ_1 y ϕ_2 aplicaciones lineales de V en V cuyas matrices canónicas de Jordan son respectivamente

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' \end{pmatrix}.$$

Sean f_1 y f_2 las aplicaciones proyectivas de $\mathbf{P}(V)$ en $\mathbf{P}(V)$ (en este caso $\mathbf{P}(V)$ es un plano proyectivo sobre $\mathbf{k}$) inducidas respectivamente por ϕ_1 y ϕ_2. Entonces f_1 y f_2 son proyectividades. El conjunto de puntos fijos de f_1 es una recta proyectiva. El conjunto de puntos fijos de f_2 es una recta proyectiva y un punto fuera de esa recta.

Ejercicio 8.22. Halla todas las configuraciones posibles para el conjunto de puntos fijos de una proyectividad f de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ cuando $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ y cuando $\mathbf{k} = \mathbf{C}$ (indicación: considera todas las matrices canónicas de Jordan que puede tener un automorfismo de $\mathbf{k}^3$).

Sistemas de referencias proyectivos y coordenadas homogéneas.

Al hablar de puntos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y al hacer cálculos (intersecciones, subespacios proyectivos generados) con subespacios proyectivos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ usamos, sin mencionarlo de forma muy explícita, coordenadas (*homogéneas*, es decir, determinadas de forma única salvo producto por un escalar no nulo). Esas coordenadas aparecían "inducidas" por las coordenadas (canónicas) de $\mathbf{k}^{n+1}$. Nos interesa ahora ver esas coordenadas homogéneas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de una forma no ad–hoc sino mucho más conceptual e "intrínsecamente proyectiva". Esto nos permitirá dos cosas. Por una parte nos permitirá usar coordenadas no solo en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ sino en un espacio proyectivo arbitrario $\mathbf{P}(V)$. Así, al igual que hemos hecho para espacios vectoriales y espacios afines, donde el ser capaces de dar coordenadas nos permite dar isomorfismos concretos de un espacio vectorial o afín arbitrario al espacio vectorial o al espacio afín estándar, veremos que el dar coordenadas en un espacio proyectivo arbitrario nos permite dar proyectividades concretas entre dicho espacio proyectivo y el espacio proyectivo estándar. Por otra parte podremos considerar varios sistemas de coordenadas en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ mismo, elegiendo el que más convenga para resolver un problema concreto. Dado un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n, queremos definir algún tipo de sistema de referencia que nos permita asignar $n+1$ coordenadas a cada punto de $\mathbf{P}(V)$. Como las coordenadas ad–hoc con las que hemos trabajado en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ vienen de las coordenadas de $\mathbf{k}^{n+1}$ respecto de la base canónica, parece lógico fijar una base B de V para dar coordenadas (homogéneas) en $\mathbf{P}(V)$. Es claro que estas coordenadas homogéneas estarán determinadas salvo multiplicación por un escalar no nulo. Por otra parte, querríamos describir el sistema de referencia que vamos a usar en términos puramente proyectivos. La primera tentación es, si $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, considerar el conjunto $\{[v_0], [v_1], \ldots, [v_n]\}$. El problema es que si nos dan un conjunto $\{[v_0], [v_1], \ldots, [v_n]\}$ no somos capaces de recuperar la base B, es decir, existen muchas bases $B' = \{v'_0, v'_1, \ldots, v'_n\}$ tales que $\{[v'_0], [v'_1], \ldots, [v'_n]\} = \{[v_0], [v_1], \ldots, [v_n]\}$. Si los vectores de B' se obtuvieran a partir de los de B multiplicando por la misma constante no del conjunto $\{p_0, p_1, p_2\}$? Podríamos tomar un representante de p en $\mathbf{k}^3$, por ejemplo, el vector $v = (1, 1, 1)$ e, ingenuamente, escribir las coordenadas de v en una base formada por representantes de p_0, p_1 y p_2, por ejemplo, la base canónica $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. En ese caso, las coordenadas de v son $(1, 1, 1)$ y las coordenadas de p serían $(1 : 1 : 1)$. Pero de igual forma, podríamos haber elegido otra base distinta pero también formada por representantes de p_0, p_1 y p_2, por ejemplo, la base $B' = \{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$. En este caso, las coordenadas de v respecto de B' son $(1, 1/2, 1/3)$ y las coordenadas de p serían $(1 : 1/2 : 1/3)$ o, si se quiere, $(3 : 2 : 1)$. En cualquier caso, no somos capaces de asignar a p unas coordenadas únicas.

Entonces, en un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n, si tenemos una base $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de V y el conjunto de puntos proyectivamente independientes al que B da lugar, necesitamos algún dato más para poder recuperar B a partir de dichos puntos, aunque no recuperemos B del todo de forma única sino de forma única salvo producto por un escalar $\lambda \neq 0$. Dada una base $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de V, lo que haremos será considerar no $n + 1$ puntos, sino $n + 2$ puntos, que serán $p_0 = [v_0], p_1 = [v_1], \ldots, p_n = [v_n], p_{n+1} = [v_0 + v_1 + \cdots + v_n]$. Puedes comprobar como ejercicio (consulta el ejercicio 8.26) que estos puntos $p_0, p_1, \cdots, p_{n+1}$ tienen la propiedad de que cualquier subconjunto formado $n + 1$ puntos de entre ellos es un conjunto de puntos proyectivamente independientes (o lo que es lo mismo, no están contenidos en un hiperplano de $\mathbf{P}(V)$; ¿ves por qué?). Esta es la propiedad que usaremos en la siguiente proposición:

Proposición 8.24. *Consideramos $n+2$ puntos $p_0, \ldots, p_{n+1}$ de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n, tales que no haya ningún hiperplano de $\mathbf{P}(V)$ que contenga a $n + 1$ de ellos. Entonces existe una base $\{v_0, \ldots v_n\}$ de V tal que*

$$p_0 = [v_0], \ldots, p_n = [v_n] \text{ y } p_{n+1} = [v_0 + ... + v_n]. \tag{8.24.1}$$

Además, cualquier otra conjunto de $n + 1$ vectores de V que verifique (8.24.1) *es una base de V de la forma $\{\lambda v_0, \ldots, \lambda v_n\}$, para algún $\lambda \in \mathbf{k}^*$.*

Demostración. Sean $w_0, \ldots, w_{n+1} \in V$ tales que $p_0 = [w_0], \ldots, p_{n+1} = [w_{n+1}]$. Como $p_0, \ldots, p_n$ no están en ningún hiperplano de $\mathbf{P}(V)$, $w_0, \ldots, w_n$ no están en ningún hiperplano de V, es decir, son vectores linealmente independientes, por lo que, al ser $n + 1$, forman una base de V. Tendremos entonces una relación $w_{n+1} = \lambda_0 w_0 + \cdots + \lambda_n w_n$, donde además $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ son todos no nulos (si fuera $\lambda_i = 0$, entonces los vectores $w_0, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_{n+1}$ serían linealmente dependientes, con lo que estarían contenidos en un hiperplano, luego los puntos $p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_{n+1}$ estarían en un hiperplano, en contra de nuestra hipótesis). Basta tomar entonces $v_0 = \lambda_0 w_0, \ldots, v_n = \lambda_n w_n$.

Supongamos ahora que tenemos $v_0', \ldots, v_n' \in V$ tales que $p_0 = [v_0'], \ldots, p_n = [v_n']$ y $p_{n+1} = [v_0' + \cdots + v_n']$. Entonces extistirán $\mu_0, \ldots, \mu_{n+1}$ no nulos tales que

$$\begin{array}{ccc} v_0' & = & \mu_0 v_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Definición 8.25. *(referencia proyectiva)* Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n.

(1) Decimos que $n+2$ puntos de $\mathbf{P}(V)$ están en *posición general* si no existe ningún hiperplano de $\mathbf{P}(V)$ que contenga a $n+1$ de ellos.

(2) Decimos que un conjunto $\mathscr{R} = \{p_0, p_1, \dots, p_n; p_{n+1}\}$ es un *sistema de referencia proyectivo* o, simplemente, una *referencia proyectiva* de $\mathbf{P}(V)$ si $p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$ están en posición general. A p_{n+1} lo llamamos *punto unidad* de $\mathscr{R}$.

(3) Dada una referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{p_0, p_1, \dots, p_n; p_{n+1}\}$ de $\mathbf{P}(V)$ decimos que $B = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ es una *base asociada* a $\mathscr{R}$ si $p_0 = [v_0], p_1 = [v_1], \dots, p_n = [v_n]$ y $p_{n+1} = [v_0 + \cdots + v_n + v_{n+1}]$.

(4) Dado un punto $p = [v]$ de $\mathbf{P}(V)$, decimos que $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ son las *coordenadas homogéneas* de p con respecto a una referencia proyectiva $\mathbf{R}$ de $\mathbf{P}(V)$ si $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de v respecto a una base B asociada a $\mathscr{R}$.

Ejercicio 8.26. Sea $B = \{v_0, \dots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V de dimensión $n+1$. Demuestra que los puntos $p_0 = [v_0], \dots, p_n = [v_n], p_{n+1} = [v_0 + \cdots + v_n]$ de $\mathbf{P}(V)$ están en posición general. Concluye que $\mathscr{R} = \{p_0, \dots, p_n; p_{n+1}\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ y que B es una base asociada a $\mathscr{R}$.

Observación 8.27. Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n, sea $\mathscr{R}$ una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ y sea p un punto de $\mathbf{P}(V)$.

(1) Sean $v, v' \in V$ tales que $p = [v] = [v']$ y sea B una base asociada a $\mathscr{R}$. Entonces las coordenadas $(x_0, \dots, x_n)$ de v y las coordenadas $(x'_0, \dots, x'_n)$ de v' respecto de B cumplen $(x'_0, \dots, x'_n) = \alpha(x_0, \dots, x_n)$, para algún $\alpha \in \mathbf{k}^*$. Por tanto $(x_0 : \cdots : x_n) = (x'_0 : \cdots : x'_n)$

(2) Sean B y B' dos bases asociadas de $\mathscr{R}$ y sea $p = [v]$. Si $(x_0, \dots, x_n)$ son las coordenadas de v respecto de B y $(y_0, \dots, y_n)$ son las coordenadas de v respecto de B', entonces existe $\beta \in \mathbf{k}^*$ tal que $(y_0, \dots, y_n) = \beta(x_0, \dots, x_n)$. Por tanto, $(x_0 : \cdots : x_n) = (y_0 : \cdots : y_n)$.

Así pues, dada una referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de $\mathbf{P}(V)$ y un punto p de $\mathbf{P}(V)$, las coordenadas homogéneas de p respecto $\mathscr{R}$ que aparecen en el apartado (d) de la definición 8.25 están bien definidas.

Damos a continuación algunos ejemplos de referencias proyectivas:

Ejemplo 8.28. *(referencia proyectiva canónica)* La referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ es $\mathscr{R}_c = \{(1 : 0 : \cdots : 0), (0 : 1 : 0 : \cdots : 0), \dots, (0 : \cdots : 0 : 1); (1 : 1 : \cdots : 1)\}$. La base canónica de $\mathbf{k}^{n+1}$ es una base asociada a $\mathscr{R}_c$. Las coordenadas homogéneas del punto $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ respecto de $\mathscr{R}$ son $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$.

Ejemplo 8.29. El conjunto $\mathscr{R} = \{(1 : 0), (1 : 1); (1 : -1)\}$ es una referencia de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ y la base $\{(2, 0), (-1, -1)\}$ de $\mathbf{k}^2$ es una base asociada a $\mathscr{R}$.

Observación 8.30. (1) Si cambiamos el punto unidad de una referencia $\mathscr{R}$, la base asociada de la nueva referencia no es en general proporcional a la base asociada

$\{(1,1,\cdots,1),(-1,0,\cdots,0),\ldots,(0,\cdots,0,-1,0)\}$ y las coordenadas homogéneas del punto $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ respecto de $\mathscr{R}$ son $(x_n : -x_0 + x_n : \cdots : -x_{n-1} + x_n)$.

Ejemplo 8.31. Sea l la recta proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación implícita $x_0 - x_1 + x_2 = 0$ y sea W el subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ de ecuación implícita $x_0 - x_1 + x_2 = 0$ (por tanto, $l = \mathbf{P}(W)$). En ese caso $\mathscr{R} = \{(1:1:0),(1:0:-1);(0:1:1)\}$ es una referencia proyectiva de l. La base $B = \{(1,1,0),(-1,0,1)\}$ de W es una base asociada a $\mathscr{R}$ y un punto cualquiera $(a-b : a : b)$ de l $((a,b) \neq (0,0))$ tiene coordenadas homogéneas $(a : b)$ respecto de $\mathscr{R}$.

Como en el caso de un sistema de referencia cartesiano, que nos permite dar un isomorfismo afín entre un espacio afín cualquiera de dimensión n y el espacio afín estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ (véase la proposición 4.2), o en el caso de un sistema de referencia cartesiano rectangular, que nos permite dar una isometría entre un espacio afín euclídeo cualquiera de dimensión n y el espacio afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ (véase la proposición 6.2), un sistema de referencia proyectivo nos permite (aunque, como en los dos casos que acabamos de mencionar, de forma no canónica) dar una proyectividad entre un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ cualquiera de dimensión n y el espacio proyectivo estándar $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ (esto justifica que la mayoría de nuestros ejemplos y ejercicios sean en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$). Lo enunciamos en la siguiente proposición, cuya demostración dejamos como ejercicio:

Proposición 8.32. *Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ y sea $\mathscr{R}$ una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$. Entonces la aplicación $\psi_{\mathscr{R}} : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ que asocia a cada punto p de $\mathbf{P}(V)$ sus coordenadas $(x_0 : \cdots : x_n)$ con respecto a $\mathscr{R}$ es una proyectividad.*

Igual que los isomorfismos afines, que se caracterizan por cómo actúan sobre las referencias cartesianas (véase la proposición 4.11), y las isometrías, que se caracterizan por cómo actúan sobre las referencias cartesianas rectangulares, las proyectividades se caracterizan por cómo actúan sobre las referencias proyectivas:

Proposición 8.33. *Sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ dos espacios vectoriales de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ y sea f la aplicación proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ a $\mathbf{P}(V')$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *La aplicación f es una proyectividad.*
(b) *La aplicación f transforma* cualquier *referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{p_0,\ldots,p_n;p_{n+1}\}$ de $\mathbf{P}(V)$ en una referencia proyectiva $\mathscr{R}' = \{f(p_0),\ldots,f(p_n);f(p_{n+1})\}$ de $\mathbf{P}(V')$.*
(c) *La aplicación f transforma* una *referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{p_0,\ldots,p_n;p_{n+1}\}$ de $\mathbf{P}(V)$ en una referencia proyectiva $\mathscr{R}' = \{f(p_0),\ldots,f(p_n);f(p_{n+1})\}$ de $\mathbf{P}(V')$.*

Demostración. Sea ϕ una aplicación lineal de V a V' tal que f es la aplicación proyectiva inducida por ϕ. Vemos (a) implica (b), (b) implica (c) y (c) implica (a).

(a) implica (b): Como f es una proyectividad, ϕ es un isomorfismo por la proposición 8.14. Sea $B = \{v_0, \ldots, v_n\}$ una base asociada a $\mathscr{R}$. Entonces $\phi(B) = \{\phi(v_0), \ldots, \phi(v_n)\}$ es una

(b) implica (c): trivial.

(c) implica (a): Dada una referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{p_0, \ldots, p_n; p_{n+1}\}$ de $\mathbf{P}(V)$ y una base asociada suya $B = \{v_0, \ldots, v_n\}$, supongamos que $\{f(p_0), \ldots, f(p_n); f(p_{n+1})\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V')$. En ese caso la proposición 8.24 y (8.33.1) implican que $\phi(B)$ es una base de V'. Por tanto ϕ es un isomorfismo entre V y V' y, por la proposición 8.14, f es una proyectividad. □

Igual que en el caso lineal o en el caso afín, las proyectividades son muy rígidas ya que, como veremos a continuación, una proyectividad viene determinada por la imagen de una referencia proyectiva:

Teorema 8.34. *Sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ dos espacios proyectivos de dimensión n y sean $\mathscr{R} = \{p_0, \ldots, p_n; p_{n+1}\}$ y $\mathscr{R}' = \{p'_0, \ldots, p'_n; p'_{n+1}\}$ referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$ y de $\mathbf{P}(V')$ respectivamente. Existe una unica proyectividad $f : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ tal que $f(p_i) = p'_i$ para todo $i = 0, \ldots, n+1$.*

Demostración. Existencia: Sean B y B' bases asociadas a $\mathscr{R}$ y a $\mathscr{R}'$ respectivamente y sea ϕ la única aplicación lineal de V a V' tal que $\phi(B) = B'$. Como ϕ transforma una base de V en una base de V', ϕ es un isomorfismo. Consideramos entonces la aplicación proyectiva f inducida por ϕ, que será una proyectividad por la proposición 8.14.

Unicidad: Sean f_1 y f_2 dos proyectividades entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ tales que $f_1(p_i) = p'_i$ y $f_2(p_i) = p'_i$, para todo $i = 0, \ldots, n+1$, y supongamos que f_1 y f_2 vienen inducidas por las aplicaciones lineales ϕ_1 y ϕ_2 de V a V', que son de hecho isomorfimos por la proposición 8.14. Sea B una base asociada a $\mathscr{R}$. De la demostración de la proposición 8.33 se deduce que $\phi_1(B)$ y $\phi_2(B)$ son bases asociadas a $\mathscr{R}'$, por lo que, por la proposición 8.24, los vectores de $\phi_2(B)$ se obtienen de los de $\phi_1(B)$ multiplicando estos últimos por un escalar no nulo λ. De esto se deduce que $\phi_2 = \lambda\phi_1$. Entonces la proposición 8.7 implica que ϕ_1 y ϕ_2 inducen la misma aplicación proyectiva, por lo que $f_1 = f_2$. □

Matriz de una aplicación proyectiva

Como las aplicaciones proyectivas vienen inducidas por aplicaciones lineales y estas pueden expresarse en forma de matriz, es lógico pensar que también las aplicaciones proyectivas se podrán expresar por medio de una matriz.

Definición 8.35. *(matriz de una aplicación proyectiva).* Sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ dos espacios proyectivos de dimensiones n y m respectivamente, sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$ una aplicación proyectiva entre ellos, inducida por una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$. Sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$ y de $\mathbf{P}(V')$ y sean B y B' bases asociadas a $\mathscr{R}$ y a $\mathscr{R}'$ respectivamente. Entonces decimos que la matriz $M_{B,B'}(\phi)$ de ϕ respecto de B y B' es una matriz de f respecto de $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$.

Observación 8.36. Aunque fijemos $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$, no existe una única matriz de f respecto